数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 18-26

ON AN INHOMOGENEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATION PROBLEM OF e

三重大教育 小松 尚夫 (TAKAO KOMATSU)

1. 序論

θを無理数、ϕを実数とし、$q\theta-\phi$ がどんな整数qを取っても整数にならないものとする。このようなペアθ, ϕに対して 非斉次近似定数

$$\mathcal{M}(\theta,\phi)=\liminf_{|q|\to\infty}|q|\|q\theta-\phi\|$$

を定義する。また、補助定数として

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)=\liminf_{q\to+\infty}q\|q\theta-\phi\|$$

及び

$$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)=\liminf_{q\to+\infty}q\|q\theta+\phi\|=\liminf_{q\to-\infty}|q|\|q\theta-\phi\|.$$

を定義しておく。すなわち、$\mathcal{M}(\theta,\phi)=\min\big(\mathcal{M}_+(\theta,\phi),\mathcal{M}_-(\theta,\phi)\big)$ である。(これらの逆数であるLagrange定数を研究している者もいる。) $\mathcal{M}(\theta,\phi)$や$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$の値については、1950年代にCassels [1], Descombes [4], Sós [11]などによりその評価が研究されてきたが、その後殆ど進展がなく、具体的なペアθ, ϕ (例えば$\theta=\sqrt{2}$, $\phi=1/2$)に対して$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値がどうなるかは全く知られることがなかった。しばらくして1994年に、Cusickなど[2]が Sósのアルゴリズムを用いて、具体的な$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値を求め、$\theta=(1+\sqrt{5})/2=[1;1,1,1,\dots]$のときに $\mathcal{M}(\theta,1/2)=1/(4\sqrt{5})$, $\mathcal{M}(\theta,1/\sqrt{5})=1/(5\sqrt{5})$等を示した。しかしこの論文では、アルゴリズムと$\mathcal{M}(\theta,\phi)$との関係が明確ではなく、gapが多かった。更に1997年には著者[5]によって、$\min\|q\theta+\phi\|$を考えることにより$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値を求める方法が与えられ、$\theta=(\sqrt{a^2+4}-a)/2=[0;a,a,a,\dots]$のときに $\mathcal{M}(\theta,1/2)=1/(4\sqrt{a^2+4})$, $\mathcal{M}(\theta,1/\sqrt{a^2+4})=1/((a^2+4)\sqrt{a^2+4})$, $\mathcal{M}(\theta,1/a)=1/(a^2\sqrt{a^2+4})$等が示された。しかし、この方法は求め方があまりに煩雑なばかりか、異なるパターンの連分数展開をもつθ (例えば$\theta=\sqrt{3}=[1;1,2,1,2,\dots]$など) に対しては、全く応用がきかなかった。

最近になって、著者[6]は西岡-塩川-田村のアルゴリズム[9]により$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値が比較的簡単に求められることを発見した。これにより、例えば$\theta=(\sqrt{ab(ab+4)}-ab)/(2a)=[0;a,b,a,b,\dots]$のときに $\mathcal{M}(\theta,1/2)=b/(4\sqrt{D})$ (a,bとも奇数で$a>b$); $a/(4\sqrt{D})$ (それ以外), $\mathcal{M}(\theta,1/\sqrt{D})=a/(D\sqrt{D})$, $\mathcal{M}(\theta,1/d)=a/(d^2\sqrt{D})$ (dは1以外のaの約数) 等が示された。ここで$D=ab(ab+4)$としている。そればかりか、この方法によれば、θが実2次無理数で$\phi\in\mathbb{Q}(\theta)$であるどんなペア$\theta,\phi$に対しても$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値が実際に求められるのである。(このような$\theta$の連分数展開は循環節をもち、$\phi$の$\theta$による表現も循環することが知られている[7]。)

それでは、連分数展開が循環しないようなθについては、$\mathcal{M}(\theta,\phi)$を求めることができないのだろうか？実は、循環しなくてもeのように擬似循環すれば、[6]で得た方法により計算が可能である。その事実を、具体例により幾つか見てみたいと思う。

2. 西岡-塩川-田村のアルゴリズム

まず最初に、西岡-塩川-田村のアルゴリズムと$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)$との関係を見てみよう。$\theta=[\,a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\,]$を単純連分数展開として、

$$\begin{aligned}\theta &= a_0+\theta_0, & a_0 &= \lfloor\theta\rfloor\,,\\ 1/\theta_{n-1} &= a_n+\theta_n, & a_n &= \lfloor 1/\theta_{n-1}\rfloor \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)\end{aligned}$$

によって生成されるものとする。θのk次近似 $p_k/q_k=[\,a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_k\,]$ は、漸化式

$$\begin{aligned}p_k &= a_kp_{k-1}+p_{k-2} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), & p_{-2}&=0, \quad p_{-1}=1,\\ q_k &= a_kq_{k-1}+q_{k-2} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), & q_{-2}&=1, \quad q_{-1}=0\end{aligned}$$

によって与えられる。 そして、数列$\{\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots\}$による$\phi$の表現（非斉次連分数展開）$\phi={}_\theta[\,b_0;\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\,]$を

$$\begin{aligned}\phi &= b_0-\phi_0, & b_0 &= \lceil\phi\rceil\,,\\ \phi_{n-1}/\theta_{n-1} &= b_n-\phi_n, & b_n &= \lceil\phi_{n-1}/\theta_{n-1}\rceil \quad (n=1,\ 2,\ \ldots\,).\end{aligned}$$

によって与える。すると ϕは

$$\begin{aligned}\phi &= b_0-b_1\theta_0+b_2\theta_0\theta_1-\cdots+(-1)^kb_k\theta_0\theta_1\cdots\theta_{k-1}-(-1)^k\theta_0\theta_1\cdots\theta_{k-1}\phi_k\\ &= b_0-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kb_{k+1}\theta_0\theta_1\cdots\theta_k = b_0-\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1}D_k\end{aligned}$$

と表される。ここで $D_k=q_k\theta-p_k=(-1)^k\theta_0\theta_1\ldots\theta_k\ (k=0,1,2,\ldots)$ としている。以上のアルゴリズムと$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)$との関係として次のことが知られている[6]。

<u>定理**A.**</u>

$$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)=\liminf_{n\to+\infty}\min(B_n\|B_n\theta+\phi\|,B_n^*\|B_n^*\theta+\phi\|)\,,$$

ここで $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_kq_{k-1}$ 及び $B_n^*=B_n-q_{n-1}$。

注. 更に$B_n\|B_n\theta+\phi\|=B_n|D_{n-1}|\phi_n$ 及び$B_n^*\|B_n^*\theta+\phi\|=(B_n-q_{n-1})|D_{n-1}|(1-\phi_n)$である事実から、$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)=\mathcal{M}_-(\theta,1-\phi)$と合わせて$\mathcal{M}(\theta,\phi)$が求められる。

3. $\theta=e$ の場合

θの連分数展開が擬似循環して、

$$\theta=[\,c_0;\ c_1,\ \ldots,\ c_n,\ \overline{Q_1(k),\ \ldots,\ Q_p(k)}\,]_{k=1}^{\infty}\,,$$

と表される場合、θをHurwitzian numberであるという。ここで、c_0は整数、$c_1,\ \ldots,\ c_n$は正の整数、$Q_1(k),\ \ldots,\ Q_p(k)$は有理係数をもつ多項式で、$k=1,2,\ldots$ に対して正整数値を取り、少なくても１つの多項式は定数ではないものとする。$Q_1(k),\ \ldots,\ Q_p(k)$は擬似循環節と呼ばれる ([3],[8],[10]等を参照)。

最も典型的なHurwitzian numberである

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots] = [2; \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}$$

を取り上げてみよう。このとき、

$$a_{3n-2} = a_{3n} = 1, \quad a_{3n-1} = 2n \to \infty \quad (n = 1, 2, \ldots \to \infty)$$

及び

$$\begin{aligned} \theta_{3n-2} &= [\,0;\ 2n,\ 1,\ 1,\ 2n+2,\ 1,\ 1,\ 2n+4,\ \ldots\,] \to 0 \\ \theta_{3n-1} &= [\,0;\ 1,\ 1,\ 2n+2,\ 1,\ 1,\ 2n+4,\ 1,\ \ldots\,] \to \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \to \infty). \\ \theta_{3n} &= [\,0;\ 1,\ 2n+2,\ 1,\ 1,\ 2n+4,\ 1,\ 1,\ \ldots\,] \to 1 \end{aligned}$$

に注意する。

次に$\phi = 1/4$と取ってみると、西岡-塩川-田村のアルゴリズムにより、

$$\frac{1}{4} = {}_{\theta}[\,1;\ 2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 4,\ 1,\ \overline{1,\ \frac{3a_{12k-4}-2}{4},\ 1,}$$
$$\overline{1,\ \frac{3}{4}a_{12k-1},\ 2,\ 1,\ \frac{a_{12k+2}-6}{4},\ 1,\ 1,\ \frac{1}{4}a_{12k+5},\ 2}\,]_{k=1}^{\infty}$$

と表される。また

$$\begin{aligned} &\phi_0 = \frac{3}{4}, && \phi_1 = \frac{5-3\theta_1}{4}, && \phi_2 = \frac{5(1-\theta_2)}{4}, \\ &\phi_3 = 2 - \frac{5}{4}\theta_3, && \phi_4 = \frac{5}{4} - 2\theta_4, && \phi_5 = 1 - \frac{5}{4}\theta_5, \end{aligned}$$

かつ　$n = 1, 2, \ldots \to \infty$に対して

$$\begin{aligned} \phi_{12n-6} &= \frac{5}{4} - \theta_{12n-6} \to \frac{1}{4}, & \phi_{12n-5} &= \frac{3-5\theta_{12n-5}}{4} \to \frac{3}{4}, \\ \phi_{12n-4} &= \frac{3}{4}(1-\theta_{12n-4}) \to \frac{3}{8}, & \phi_{12n-3} &= 1 - \frac{3}{4}\theta_{12n-3} \to \frac{1}{4}, \\ \phi_{12n-2} &= \frac{3}{4} - \theta_{12n-2} \to \frac{3}{4} & \phi_{12n-1} &= 1 - \frac{3}{4}\theta_{12n-1} \to \frac{5}{8}, \\ \phi_{12n} &= \frac{7}{4} - \theta_{12n} \to \frac{3}{4}, & \phi_{12n+1} &= \frac{1-7\theta_{12n+1}}{4} \to \frac{1}{4}, \\ \phi_{12n+2} &= \frac{1}{4}(1-\theta_{12n+2}) \to \frac{1}{8}, & \phi_{12n+3} &= 1 - \frac{1}{4}\theta_{12n+3} \to \frac{3}{4}, \\ \phi_{12n+4} &= \frac{1}{4} - \theta_{12n+4} \to \frac{1}{4}, & \phi_{12n+5} &= 1 - \frac{1}{4}\theta_{12n+5} \to \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。実際に値を計算するために、次の事実を使う。

補助定理. eの連分数展開

$$e = [\ 2;\ \overline{1,\ 2k,\ 1}\ ]_{k=1}^{\infty}$$

において

$$\lim_{n\to\infty} q_{3n}|D_{3n-1}| = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} q_{3n-1}|D_{3n-1}| = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} q_{3n+1}|D_{3n}| = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} q_{3n}|D_{3n}| = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} q_{3n+2}|D_{3n+1}| = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} q_{3n+1}|D_{3n+1}| = 0$$

が成り立つ。

証明.

$$\frac{q_{3n-2}}{q_{3n-1}} = \frac{1}{2n + q_{3n-3}/q_{3n-2}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} q_{3n+2}|D_{3n+1}| = \lim_{n\to\infty} q_{3n-1}|D_{3n-2}|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \theta_{3n-1} q_{3n-2}/q_{3n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cdot 0} = 1$$

故に $q_{3n-1}|D_{3n-1}| = q_{3n-1}|D_{3n-2}|\theta_{3n-1} \to 1 \cdot 1/2 = 1/2\ (n \to \infty)$. また、

$$\frac{q_{3n-1}}{q_{3n}} = \frac{1}{1 + q_{3n-2}/q_{3n-1}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

であることから、

$$q_{3n}|D_{3n}| = \frac{1}{(1 + \theta_{3n+1}) + q_{3n-1}/q_{3n}} \to \frac{1}{1+0+1} = \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

それ故 $q_{3n}|D_{3n-1}| = q_{3n}|D_{3n}|/\theta_{3n} \to 1/2 \cdot 1 = 1/2$ である。最後に

$$q_{3n+1}|D_{3n+1}| = \frac{1}{2n+2}(q_{3n+2}|D_{3n+1}| - q_{3n}|D_{3n}|\theta_{3n+1}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

及び

$$q_{3n+1}|D_{3n}| = \frac{1}{1 + \theta_{3n+1} \cdot q_{3n}/q_{3n+1}} \to \frac{1}{1+0} = 1 \quad (n \to \infty)$$

がいえる。 □

さて、$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$B_{12n-6} = 2q_0 + 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 4q_4 + q_5 + \sum_{i=1}^{n-1} \Bigg(q_{12i-6} + \frac{3a_{12i-4} - 2}{4} q_{12i-5}$$
$$+ q_{12i-4} + q_{12i-3} + \frac{3}{4} a_{12i-1} q_{12i-2} + 2q_{12i-1} + q_{12i}$$
$$+ \frac{a_{12i+2} - 6}{4} q_{12i+1} + q_{12i+2} + q_{12i+3} + \frac{1}{4} q_{12i+4} + 2q_{12i+5} \Bigg)$$
$$= q_6 + \frac{5}{4} q_5 - \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(q_{12i+6} + \frac{5}{4} q_{12i+5} - q_{12i-6} - \frac{5}{4} q_{12i-7} \right)$$
$$= q_{12n-6} + \frac{5}{4} q_{12n-7} - \frac{1}{2}$$

であるから、補助定理より

$$
\begin{aligned}
&B_{12n-6}\|B_{12n-6}\theta+\phi\| = B_{12n-6}\phi_{12n-6}|D_{12n-7}| \\
&= \left(q_{12n-6}|D_{12n-7}| + \frac{5}{4}q_{12n-7}|D_{12n-7}| - \frac{1}{2}|D_{12n-7}|\right)\phi_{12n-6} \\
&\to \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{32} \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

及び

$$
\begin{aligned}
&B^*_{12n-6}\|B^*_{12n-6}\theta+\phi\| = (B_{12n-6} - q_{12n-7})(1-\phi_{12n-6})|D_{12n-7}| \\
&= \left(q_{12n-6}|D_{12n-7}| + \frac{1}{4}q_{12n-7}|D_{12n-7}| - \frac{1}{2}|D_{12n-7}|\right)(1-\phi_{12n-6}) \\
&\to \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{32} \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。また補助定理を使って

$$
\begin{aligned}
&B_{12n-5}\|B_{12n-5}\theta+\phi\| = (B_{12n-6} + q_{12n-6})\phi_{12n-5}|D_{12n-6}| \\
&= \left(\frac{5}{4}q_{12n-5}|D_{12n-6}| + \frac{3}{4}q_{12n-6}|D_{12n-6}| - \frac{1}{2}|D_{12n-6}|\right)\phi_{12n-5} \\
&\to \left(\frac{5}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{39}{32} \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

を得る。$B^*_{12n-5} = B_{12n-5} - q_{12n-6} = B_{12n-6}$ であるから、

$$
B^*_{12n-5}\|B^*_{12n-5}\theta+\phi\| = B_{12n-6}\|B_{12n-6}\theta+\phi\| \to \frac{9}{32} \quad (n\to\infty)
$$

が言える。同様にして、

$$
\begin{aligned}
&B_{12n-4}\|B_{12n-4}\theta+\phi\| = B^*_{12n-3}\|B^*_{12n-3}\theta+\phi\| \to \frac{9}{32}, \\
&B^*_{12n-4}\|B^*_{12n-4}\theta+\phi\| \to \frac{15}{32}, \qquad B_{12n-2}\|B_{12n-2}\theta+\phi\| \to \frac{33}{32}, \\
&B_{12n-3}\|B_{12n-3}\theta+\phi\| = B^*_{12n-2}\|B^*_{12n-2}\theta+\phi\| \to \frac{7}{32}, \\
&B_{12n-1}\|B_{12n-1}\theta+\phi\| \to \frac{15}{32}, \quad B^*_{12n-1}\|B^*_{12n-1}\theta+\phi\| \to \frac{9}{32}, \\
&B_{12n}\|B_{12n}\theta+\phi\| = B^*_{12n+1}\|B^*_{12n+1}\theta+\phi\| \to \frac{33}{32}, \\
&B^*_{12n}\|B^*_{12n}\theta+\phi\| \to \frac{7}{32}, \qquad B_{12n+1}\|B_{12n+1}\theta+\phi\| \to \frac{15}{32}, \\
&B_{12n+2}\|B_{12n+2}\theta+\phi\| = B^*_{12n+3}\|B^*_{12n+3}\theta+\phi\| \to \frac{1}{32}, \\
&B^*_{12n+2}\|B^*_{12n+2}\theta+\phi\| \to \frac{7}{32}, \qquad B_{12n+4}\|B_{12n+4}\theta+\phi\| \to \frac{9}{32} \\
&B_{12n+3}\|B_{12n+3}\theta+\phi\| = B^*_{12n+4}\|B^*_{12n+4}\theta+\phi\| \to \frac{15}{32}, \\
&B_{12n+5}\|B_{12n+5}\theta+\phi\| \to \frac{7}{32}, \quad B^*_{12n+5}\|B^*_{12n+5}\theta+\phi\| \to \frac{1}{32} \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

を求めることができる。以上より、$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)=\mathcal{M}_-\big(e,1/4\big)=1/32$ が得られる。
一方、$1-\phi=3/4$は

$$\frac{3}{4}={}_\theta[1;1,2,1,1,3,2,2,7,2,1,1,2,1,\overline{\frac{3a_{12k+2}-2}{4},1,1,\frac{3}{4}a_{12k+5},2,}$$
$$\overline{1,\frac{a_{12k+8}-6}{4},1,1,\frac{1}{4}a_{12k+11},2}]_{k=1}^{\infty}$$

と表され、同様にして

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_+(\theta,\phi)=\mathcal{M}_-\big(e,\frac{3}{4}\big)&=\lim_{n\to\infty}B_{12n+8}|D_{12n+7}|\phi_{12n+8}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{q_{12n+8}|D_{12n+7}|+q_{12n+7}|D_{12n+7}|}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-\theta_{12n+8})\\&=\frac{1+0}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}\end{aligned}$$

を得る。従って次の結果がわかる。

定理1．

$$\mathcal{M}\big(e,\frac{1}{4}\big)=\frac{1}{32}$$

以上と同様な方法で、

$$\mathcal{M}\big(e,\frac{1}{2}\big)=\frac{1}{8},\quad\mathcal{M}\big(e,\frac{1}{3}\big)=\frac{1}{18},\quad\mathcal{M}\big(e,\frac{1}{5}\big)=\frac{1}{50},\quad\mathcal{M}\big(e,\frac{1}{6}\big)=\frac{1}{72}$$

なども次々と求められる。従って、次のように予想するのはごく自然である。

予想1．2以上の任意の整数lに対して

$$\mathcal{M}\big(e,\frac{1}{l}\big)=\frac{1}{2l^2}.$$

しかし、各lに対してϕのθによる表現（非斉次連分数展開）のパターンがかなり異なるため、簡単には一般化できない。よって、証明は思っているほど容易にはできそうにない。

4. e以外のHurwitzian number

2以上の整数sに対して

$$e^{1/s}=[1;s-1,1,1,3s-1,1,1,5s-1,1,1,\dots]=[1;\overline{(2k-1)s-1,1,1}]_{k=1}^{\infty}$$

も、よく知られているHurwitzian numberの一つである。このとき、

$$a_{3n-1}=a_{3n}=1,\quad a_{3n-2}=(2n-1)s-1\to\infty\quad(n=1,2,\dots\to\infty)$$

及び $n=1,2,\dots,\to\infty$に対して

$$\begin{aligned}\theta_{3n-2}&=[\,0;\ 1,\ 1,\ (2n+1)s-1,\ 1,\ 1,\ (2n+3)s-1,\ \dots\,]\to\frac{1}{2}\\\theta_{3n-1}&=[\,0;\ 1,\ (2n+1)s-1,\ 1,\ 1,\ (2n+3)s-1,\ 1,\ \dots\,]\to1\\\theta_{3n}&=[\,0;\ (2n+1)s-1,\ 1,\ 1,\ (2n+3)s-1,\ 1,\ 1,\ \dots\,]\to0\end{aligned}$$

に注意する。更に、上記の補助定理に対応するものとして、次の補助定理*が成り立つ。

補助定理*. $e^{1/s}$ の連分数展開

$$e^{1/s} = [\ 1;\ \overline{(2k-1)s-1,\ 1,\ 1}\ ]_{k=1}^{\infty}$$

において

$$\lim_{n\to\infty} q_{3n-1}|D_{3n-2}| = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} q_{3n-2}|D_{3n-2}| = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} q_{3n}|D_{3n-1}| = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} q_{3n-1}|D_{3n-1}| = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} q_{3n+1}|D_{3n}| = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} q_{3n}|D_{3n}| = 0$$

が成り立つ。

そこで、$\theta = e$の場合と同様にして$\theta = e^{1/s}$についても、$\phi = 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ と次々に$\mathcal{M}(e^{1/s}, \phi)$の値を計算していくと、次のことが自然に予想される。

予想2. 2以上の任意の整数lに対して

$$\mathcal{M}\left(e^{1/s}, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{2l^2} \quad or \quad 0.$$

ただし、どんなときに値が0になるかの予想は難しい。参考までに、$l \leq 30$についての結果を記しておく。lが偶数のときは、0になる場合は見つからなかった（勿論 $l > 30$については、確かめられていない)。

l	$\{s \pmod{l} : \mathcal{M}(e^{1/s}, 1/l) = 0\}$
3	2
5	3
7	1,3,4,5
9	5
11	1,3,5,6,8
13	1,3,4,5,6,7,9,11
15	8
17	4,5,6,8,9,11
19	5,6,8,9,10,11,12,18
21	5,8,11,17
23	2,5,6,10,11,15,16,19,21
25	3,8,18
27	5,14
29	5,16,19,25,27

また、$e^{1/s}$の派生である次のような値（$e^{1/s}$の方がこれらの値の派生である、というべきかもしれない。*Cf.* [10]）をθとして取ることも考えた。

$$\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1} = [\ 0;\ 2s,\ 6s,\ 10s,\ \ldots\ ] = [\ 0;\ \overline{(4k-2)s}]_{k=1}^{\infty} \quad (s\text{は2以上の整数})$$

または

$$\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1} = [\ 0;\ s,\ 3s,\ 5s,\ \ldots\ ] = [\ 0;\ \overline{(2k-1)s}]_{k=1}^{\infty} \quad (s\text{は3以上の奇数}).$$

これらの θに対して、筆者は次の結果を得ている。

定理2.

$$\mathcal{M}\left(\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1}, \frac{e^{1/s}}{e^{1/s}+1}\right)=\frac{1}{4}, \quad \mathcal{M}\left(\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1}, \frac{1}{2}\right)=\mathcal{M}\left(\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1}, \frac{1}{3}\right)=0,$$

$$\mathcal{M}\left(\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1}, \frac{e^{2/s}}{e^{2/s}+1}\right)=\mathcal{M}\left(\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1}, \frac{1}{2}\right)=\mathcal{M}\left(\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1}, \frac{1}{3}\right)=0.$$

References

[1] J. W. S. Cassels, *Über* $\underline{\lim}_{x\to+\infty} x|\vartheta x+\alpha-y|$, Math. Ann. **127** (1954), 288–304.

[2] T. W. Cusick, A. M. Rockett and P. Szüsz, *On inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **48** (1994), 259–283.

[3] C. S. Davis, *On some simple continued fractions connected with* e, J. London Math. Soc. **20** (1945), 194–198.

[4] R. Descombes, *Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée*, Ann. Sci. École Norm Sup. **73** (1956), 283–355.

[5] T. Komatsu, *On inhomogeneous continued fraction expansion and inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **62** (1997), 192–212.

[6] ———, *On inhomogeneous Diophantine approximation and the Nishioka-Shiokawa-Tamura algorithm*, Acta Arith. (to appear).

[7] ———, *Substitution invariant inhomogeneous Beatty sequences*, Tokyo J. Math. (to appear).

[8] K. R. Matthews and R. F. C. Walters, *Some properties of the continued fraction expansion of* $(m/n)e^{1/q}$, Proc. Cambridge Philos. Soc. **67** (1970), 67–74.

[9] K. Nishioka, I. Shiokawa and J. Tamura, *Arithmetical properties of a certain power series*, J. Number Theory **42** (1992), 61–87.

[10] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea reprint of 1929 edition.

[11] V. T. Sós, *On the theory of Diophantine approximations*, II, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9** (1958), 229-241.

Takao Komatsu
Faculty of Education
Mie University
514-8507 Japan
komatsu@edu.mie-u.ac.jp

Abstract and Appendix

We consider the value $\mathcal{M}(\theta,\phi) = \liminf_{|q|\to\infty} |q|\|q\theta+\phi\|$ by using the algorithm of Nishioka, Shiokawa and Tamura (the NST algorithm) for a class of pairs θ, ϕ. It is known that the exact value of $\mathcal{M}(\theta,\phi)$ can be calculated if θ is a positive quadratic irrational and $\phi \in \mathbb{Q}(\theta)$. For example, $\mathcal{M}(\theta,1/2) = b/(4\sqrt{D})$ (a and b are odd with $a > b$); $a/(4\sqrt{D})$ (otherwise), $\mathcal{M}(\theta,1/\sqrt{D}) = a/(D\sqrt{D})$, $\mathcal{M}(\theta,1/d) = a/(d^2\sqrt{D})$ (d is a divisor of a with $d > 1$), where $\theta = (\sqrt{ab(ab+4)} - ab)/(2a) = [0; a, b, a, b, \dots]$ and $D = ab(ab+4)$.

This paper reveals that the exact value of $\mathcal{M}(\theta,\phi)$ can be found even if θ is not a quadratic irrational but a Hurwitzian number, namely the continued fraction expansion of θ is $\theta = [c_0; c_1, c_2, \dots, c_n, \overline{Q_1(k), \dots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty}$, where c_0 is an integer, $c_1, \dots, c_n$ are positive integers, $Q_1, \dots, Q_p$ are polynomials with rational coefficients which take positive integral values for $k = 1, 2, \dots$ and at least one of the polynomials is not constant. For example, $e = [2; \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}$, $e^{1/s} = [1; \overline{(2k-1)s-1, 1, 1}]_{k=1}^{\infty}$ where s is an integer with $s > 1$, $(e^{1/s}-1)/(e^{1/s}+1) = [0; \overline{(4k-2)s}]_{k=1}^{\infty}$ where s is an integer with $s > 1$, $(e^{2/s}-1)/(e^{2/s}+1) = [0; \overline{(2k-1)s}]_{k=1}^{\infty}$ where s is odd with $s > 1$, or $\theta = [0; 1, 2, 3, \dots] = [0; \overline{k}]_{k=1}^{\infty}$.

Indeed, $\mathcal{M}(e,1/2) = 1/8$, $\mathcal{M}(e,1/3) = 1/18$, $\mathcal{M}(e,1/4) = 1/32$, $\mathcal{M}(e,1/5) = 1/50$, $\mathcal{M}(e,1/6) = 1/72$, $\mathcal{M}(e,1/7) = 1/98$, ... can be obtained. So, it is natural to conjecture $\mathcal{M}(e,1/l) = 1/(2l^2)$ for any integer $l > 1$. In a similar manner, one can find that $\mathcal{M}(e^{1/s},1/l) = 1/(2l^2)$ if l is even with $l \le 30$; $\mathcal{M}(e^{1/s},1/l) = 0$ or $1/(2l^2)$ if l is odd with $1 < l \le 30$. It is conjectured that these facts are true for $l > 30$ too.

It is also obtained that $\mathcal{M}((e^{1/s}-1)/(e^{1/s}+1), e^{1/s}/(e^{1/s}+1)) = 1/4$, $\mathcal{M}((e^{1/s}-1)/(e^{1/s}+1), 1/2) = \mathcal{M}((e^{1/s}-1)/(e^{1/s}+1), 1/3) = 0$, $\mathcal{M}((e^{2/s}-1)/(e^{2/s}+1), e^{2/s}/(e^{2/s}+1)) = \mathcal{M}((e^{2/s}-1)/(e^{2/s}+1), 1/2) = \mathcal{M}((e^{2/s}-1)/(e^{2/s}+1), 1/3) = 0$, and $\mathcal{M}(\theta,(\theta+1)/2) = \mathcal{M}(\theta,1/2) = \mathcal{M}(\theta,1/3) = 0$ when $\theta = [0; 1, 2, 3, \dots]$. But $\mathcal{M}(\theta,(\theta+1)/2) = 1/4$ and $\mathcal{M}(\theta,1/2) = \mathcal{M}(\theta,1/3) = 0$ when $\theta = [0; 2, 4, 6, \dots]$.